

Финансови модели с стокови влияния на пазара

05.10.2018

Основна задача: предсказване на цените на финансови деривати

Опц. (Дериват) = ценна книжа / актив, чиято цена зависи от цените на други ценни книжа / активи.

Европейска

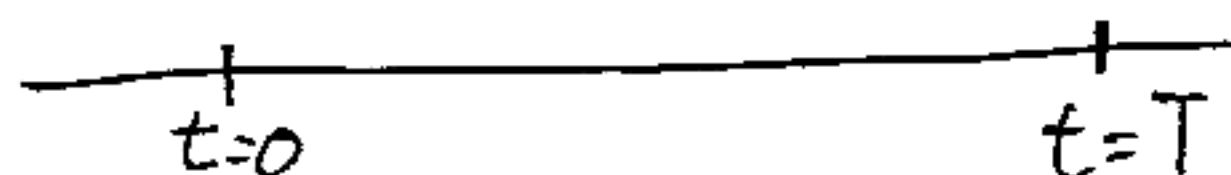
Опц. (Опция) . $t=0$

$t=T > 0$

Гризмателът на опцията има право, но не и задължение да купи даден актив по предварително договорена в момента $t=0$ цена K .

Model

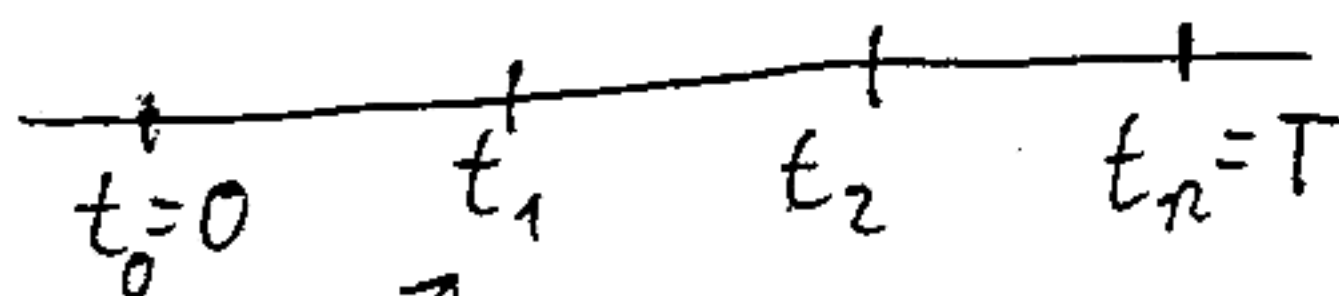
1. One-period model
Най-прост модел



Background

Линейна алгебра и
аналитична геометрия

2. Discrete multi-period model



можем да наблюдаваме
цените

Стохастичен анализ с дискретно
време

- * Мартингали
- * Филтриране
- * Предсказуемост
- * Адаптираност

3. Модел на Блек-Шолс

Можем да наблюдаваме
цените във всеки един
момент от времето

Стохастичен анализ с непрекъснато
време

- * Брауново движение

4. Модел с стокови влияния
Процесът вече не е непрекъснат

- * Процес на Пуассон
- * Сложен процес на Пуассон

12.10.2018

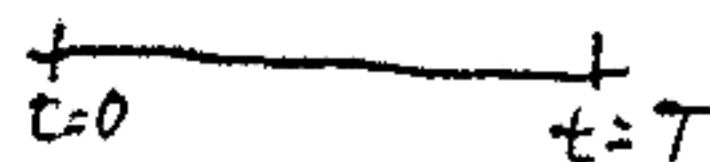
Нал-прост модел (one-period model)

Елементи:

0) Интервалът от време: $t \in \{0, T\}$

↑ настоящ момент

↓ бъдещ момент



1) Активи - $1, \dots, N$

2) Начални цени на активите - $(p_1, \dots, p_N)^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$

краен срок

3) Състояния на пазара в момента $t=T$: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$

4) Финална доходност на активите: $d_n, 1 \leq n \leq N$

↓ ш. вел. на Ω

$d_n(\omega_k)$ - финална доходност на n -ти актив в състояние ω_k

$$D = \begin{pmatrix} d_1(\omega_1) & \dots & d_N(\omega_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1(\omega_K) & \dots & d_N(\omega_K) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times N}$$

5) Портфейл - формиран се в момента $t=0$

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$$

θ_n - количество купени (продадени) акции на актива n в момента $t=0$

$\theta_n > 0$ ако купуваме

$\theta_n < 0$ ако продаваме

6) Потребление: $c = c(0) \in \mathbb{R}$

$$c(T, \omega_k) \in \mathbb{R}$$

$$c(T) = (c(T, \omega_1), \dots, c(T, \omega_K))^T \in \mathbb{R}^{K \times 1}$$

7) Трикоти не от пазара

$$e = e(0) \in \mathbb{R}$$

$$e(T, \omega_k) \in \mathbb{R}$$

$$e(T) = (e(T, \omega_1), \dots, e(T, \omega_K))^T \in \mathbb{R}^{K \times 1}$$

Уравнение на Саломея:

$$t=0: c(0) = e(0) - \sum_{n=1}^N p_n \theta_n = e(0) - p^T \theta$$

$$t=T: c(T, \omega_k) = e(T, \omega_k) + \sum_{n=1}^N d_n(\omega_k) \theta_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e(0) = e(0) - p^T \theta \\ c(T) = e(T) + D \theta \end{array} \right\} \text{ уравнение на Саломея в матричен вид}$$

Обобщено уравнение на Саломея:

$$D' := \begin{bmatrix} -p^T \\ D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times N} ; c' := \begin{bmatrix} c(0) \\ c(T) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times 1} ; e' := \begin{bmatrix} e(0) \\ e(T) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times 1}$$

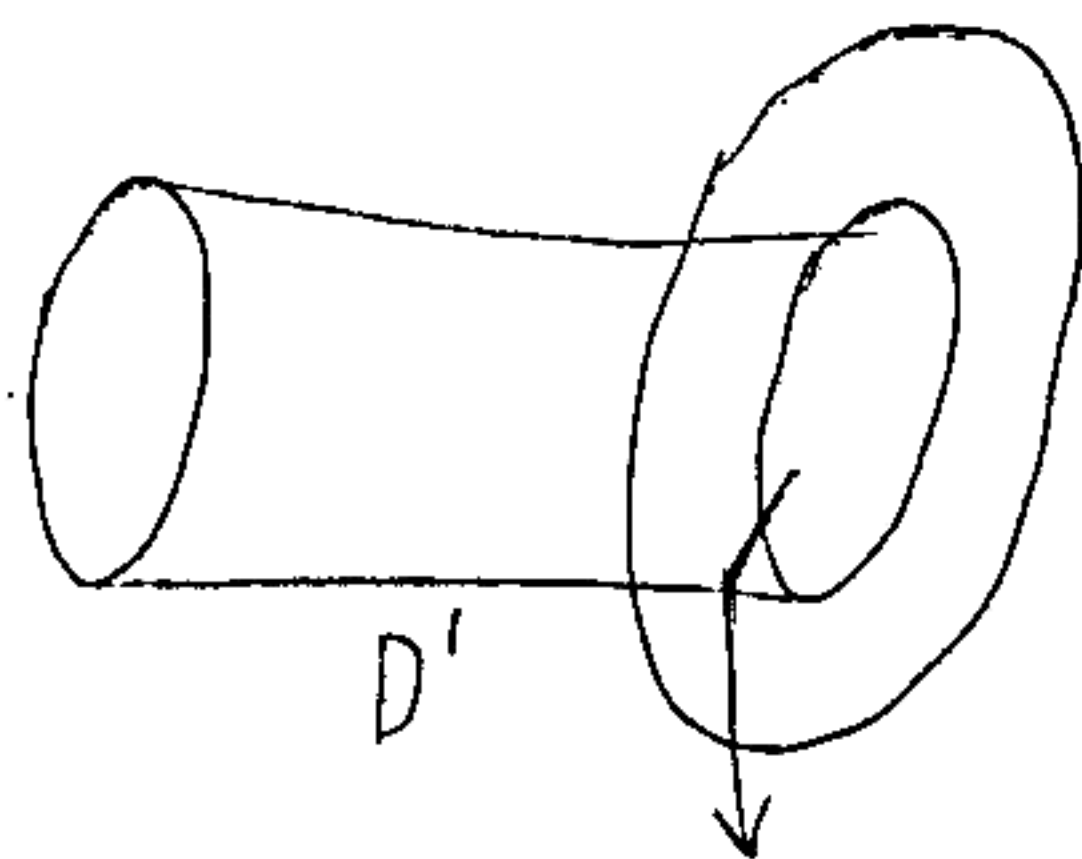
$$c' = e' + D' \theta - \text{уравнение на Саломея}$$

Гюджет: Множеството на всички възможни потребности

$$c' - e' = D' \theta$$

Разг. D' като линеен оператор:

$$D': \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}; \theta \mapsto D' \theta$$



$$\text{Im } D' \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$$

Намиране на Гюджета чрез Гюджетни ограничения: подпространство

Учване, че $\text{Im } D'$ е лин. подпр. на $\mathbb{R}^{k+1}$. Тогава съществува

$$\text{друг линеен оператор } X: X d' = \vec{0} \forall d' \in \text{Im } D'$$

↓
аннихилатор на $\text{Im } D'$

$$\text{Следователно } X D' \theta = \vec{0} \forall \theta \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow X D' = \vec{0}$$

Пр. 1 $N=4$
 $K=2$

$$p = (50, 4, 22, 44)^T$$

$$D = \begin{pmatrix} 100 & 40 & 60 & 120 \\ 100 & 0 & 40 & 80 \end{pmatrix}$$

$$e'(0) = (9, 10, 20)^T$$

Цена на първия актив не зависи от състоянието на пазара, т.е. той е безрисков. Носи 100% фиксирана доходност

Вторият актив има нулева цена в състояние 2, ^{например} ~~акция~~ акция на фирмата фирма

Финална доходност: $\max(d - K, 0)$ - цена на европейски опция върху актив с финална доходност d и матурирест K .

$$D' = \begin{pmatrix} -50 & -4 & -22 & -44 \\ 100 & 40 & 60 & 120 \\ 100 & 0 & 40 & 80 \end{pmatrix}$$

Търсим $X = (x_0, x_1, x_2) : XD' = \vec{0}$

$$\begin{cases} -50x_0 + 100x_1 + 100x_2 = 0 & /50 \\ -4x_0 + 40x_1 + 40x_2 = 0 & /4 \\ -22x_0 + 60x_1 + 40x_2 = 0 & /2 \\ -44x_0 + 120x_1 + 80x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 10 & 6 \\ -11 & 30 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times -1 \\ \times -1 \\ \times -11 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Получаваме $\begin{cases} -x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

Взимаме $x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_0 = 10$, т.е. $X = (10 \ 1 \ 4)$

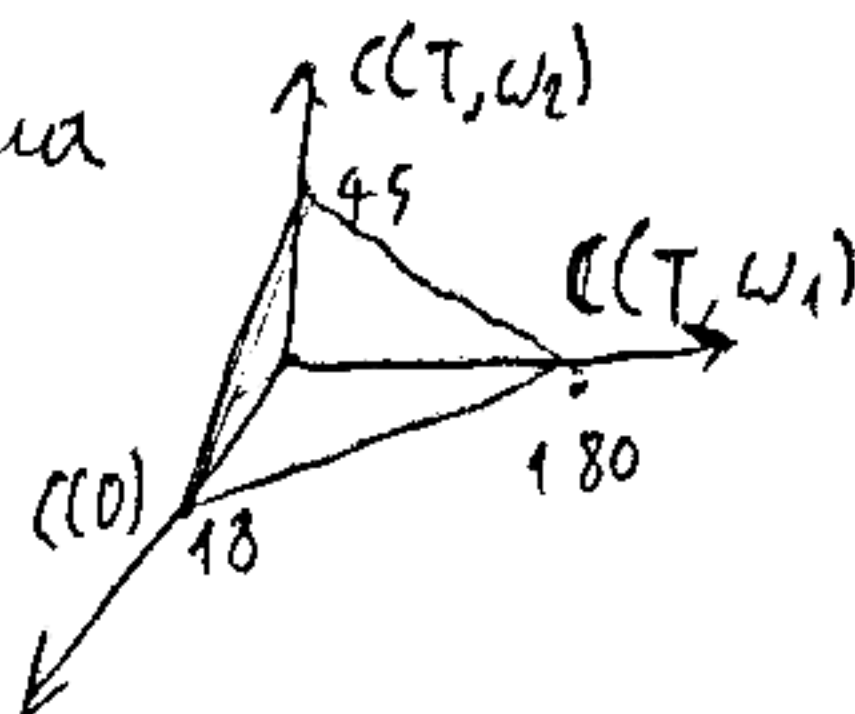
$\Rightarrow$ няма бюджетно ограничение:

$$x_0(c(0) - e(0)) + x_1(c(T, \omega_1) - e(T, \omega_1)) + x_2(c(T, \omega_2) - e(T, \omega_2)) = 0$$

$$10(c(0) - 9) + (c(T, \omega_1) - 10) + 4(c(T, \omega_2) - 20) = 0$$

$$10c(0) + \cancel{10} c(T, \omega_1) + 4c(T, \omega_2) = 180$$

Ограничението образува афинна хиперравнина.



Ако нямаме приходи нивен пазара, то ограничението ще образува линейно подпространство.

Опр. (Арбитраж) Търтфейл, $\theta \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ удовлетворяващ следните условия:

$$1) \rho^T \theta < 0$$

$$2) D\theta \geq \vec{0} \text{ (покоординатно)}$$

Тоест:

$$\cancel{e(0)} = 0 \rightarrow \text{приравняване на 0}$$

$$e(T) = \vec{0}$$

$$c(0) = -\rho^T \theta > 0$$

$$c(T) = D\theta \geq \vec{0}$$

или

$$1) \rho^T \theta \leq 0$$

$$2) D\theta \geq \vec{0}$$

$$3) \exists \text{ съст. на пазара } K: \sum_{n=1}^N d_n(\omega_n) \theta_n > 0$$

Пр.2 $N=3$

$$K=3$$

$$\rho = (8, 10, 3)^T$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 3 \\ 5 & 11 & 3 \\ 12 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \left(1, \frac{7}{2}, -\frac{87}{6}\right)^T$$

$$p^T \theta = 8 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{87}{6} = 8 + 35 - \frac{87}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$D\theta = (1 \ 0 \ 0)$$

При всички случаи ще спечелим $\frac{1}{2}$, а ако пазарът е в първото състояние ще спечелим $\frac{3}{2}$.

Опр. Един пазар се нарича пълен, ако за всяко фирмено потребление съществува портфейл, фирмата доходност на който дава желаното потребление.

$$D: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K: \theta \mapsto D\theta$$

$$\text{Im } D = \mathbb{R}^K$$

$$c(t) = D\theta \text{ винаги има решение}$$

Заб. Ако в пълен пазар се появи нов актив $N+1$ с фирмен доходност d_{N+1} , то $\exists$ портфейл $\theta: d_{N+1} = D\theta$. Тогава имаме ~~винаги~~ $p_{N+1} = p^T \theta$ ако системата цени (p, D) не допуска арбитраж.

~~Намиране~~ Намиране на цена на финансови деривати (опции) с метода на хеджирането:

→ заместване портфейлът с друг, който носи по-малък риск, но същата доходност

Пр. 1 (цена на европейска кал опция по метода на хеджира-
нето)

$$N=2$$

$$K=2$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 1,1 \\ 21 & 1,1 \end{pmatrix}$$

Безрисков, тъй като неговата доходност не зависи от
състоянието на пазара

$$d_3 = \max(d_1 - 10, 0)$$

(В момента $t=0$ се сключва договорка, че в момента $t=T$
опцията ще се реализира, ако $d_1 \geq 10$.)

Каква трябва да бъде цената на опцията при условие, че
началните цени на предлаганите активи са $p = (9, 1)$? ($p_3 = ?$)

Решение $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = ?$

$$D\theta = d_3, \text{ т.е. } \begin{cases} 6\theta_1 + 1,1\theta_2 = 0 \\ 21\theta_1 + 1,1\theta_2 = 11 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1,1 & 0 \\ 21 & 1,1 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1,1 & 0 \\ 15 & 6 & 11 \end{array} \right) \Rightarrow \theta_1 = \frac{11}{15} \text{ и } \theta_2 = -4$$

Портфейлът

~~портфейлът~~ е $\theta = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} \\ -4 \end{pmatrix}$

$$p_3 = p_1\theta_1 + p_2\theta_2 = 9 \cdot \frac{11}{15} + 1(-4) = \frac{99}{15} - \frac{60}{15} = \frac{39}{15} = \frac{13}{5}$$

Безрисков вероятност (равновесна вероятност)

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ - основно пространство
състояния на пазара

$d_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - сл. вел. със стойности - доходности на n -тия актив

Актив 1: Безрисков (d_1 е константа)

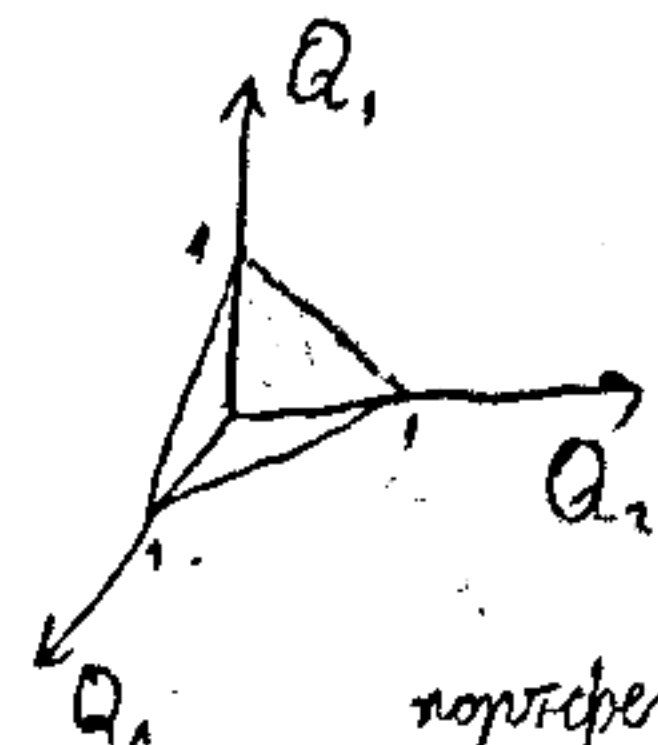
$$r = \frac{d_1}{p_1} - 1 > 4 \text{ (лихвен процент)}$$

Q - безрискова вероятност, ако средната доходност $\mathbb{E}_Q d_n = (1+r)p$

$(Q(\omega_1), Q(\omega_2), \dots, Q(\omega_K))^T \in \mathbb{R}^K$, $Q(\omega_i) \geq 0$ и $\sum_{i=1}^K Q(\omega_i) = 1$

$$\mathbb{E}_Q d_n = \sum_{k=1}^K d_n(\omega_k) Q(\omega_k), n=1, \dots, N \Leftrightarrow Q^T D = (1+r)p^T$$

Т-ма 1 (Основна теорема на финансовата математика) Безрисковата вероятност Q съществува $\Leftrightarrow$ системата цен (p, D) не допуска арбитраж



2-во ($\Rightarrow$) Нека θ е арбитраж. $D\theta$ - финална доходност на портфейла
 $p^T \theta$ - начална доходност

$$\underbrace{Q^T D \theta}_{\geq 0} = \underbrace{(1+r)}_{\geq 0} \underbrace{p^T \theta}_{\leq 0}$$

случай 1 $\theta \geq 0$, тъй като $r > -1$ $\rightarrow$ противоречие с неотрицателността на лявата страна

$$\underbrace{Q^T D \theta}_{\geq 0} = \underbrace{(1+r)}_{\geq 0} \underbrace{p^T \theta}_{\leq 0}$$

≥ 0 и поне една координата > 0

отново противоречие

($\Leftarrow$) $\mathbb{R}^{K+1}$ - пространството на всички възможни потребления $(t=0, t=T)$.

Разг. две подмножества:

1) множеството на всички възможни потребления - B

2) множеството от всички потребления, за които $c(0) \geq 0$ и $c(T) \geq 0$

$$c(0) + \sum_{k=1}^K c(T, \omega_k) \geq 1$$

Озн. това множество с H .



От това, че системата цен (p, D) не допуска арбитраж следва, че $B \cap H = \emptyset$. Ако допуснем, че

$B \cap H \neq \emptyset$, то ще следва, че съществува портфейл, който е арбитраж:

$$D' = \begin{bmatrix} -p^T \\ D \end{bmatrix}$$

$$x D' = 0 \quad (1)$$

$\rightarrow$ нетривиално решение

$$B = \{x_0 c(0) + \sum_{k=1}^K x_k c(T, \omega_k) = 0\}$$

където $(x_0, \dots, x_K)$ е решение на (1)

π - актив; p_n - начална доходност на π ; $(d_n(\omega_1), \dots, d_n(\omega_k))$ - финални доходности
 $-x_0 p_n + \sum_{k=1}^K x_k d_n(\omega_k) = 0$: уравнение, определящо B

$$\sum_{k=1}^K x_k d_n(\omega_k) = x_0 p_n \text{ за всяко } n=1, \dots, N \quad | \cdot (\cdot / x_0) \cdot (1+r)$$

$$\sum_{k=1}^K \left(\frac{x_k (1+r)}{x_0} \right) d_n(\omega_k) = (1+r) p_n$$

начална = $Q(\omega_k)$
 $\downarrow$
 Q

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^K Q(\omega_k) d_n(\omega_k) = (1+r) p_n$$

Пр. 1 (с метода на безрисковата вероятност)

$$p_3 = \mathbb{E}_Q \left(\frac{d_3}{1+r} \right)$$

$$r = 0,1$$

Първо копиране Q :

$$Q^T D = (1+r)p$$

$$\begin{cases} 6Q_1 + 21Q_2 = 1,1 \cdot 9 = 9,9 \\ 1,1Q_1 + 1,1Q_2 = 1,1 \cdot 1 = 1,1 \Leftrightarrow Q_1 + Q_2 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 15Q_2 = 3,8 \\ Q_1 + Q_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{39}{150} = \frac{13}{50}$$

$$Q_1 = \frac{37}{50}$$

$$d_3 = \begin{cases} 0, & \omega_1 \\ 11, & \omega_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_Q d_3 = \frac{11 \cdot \frac{13}{50}}{1,1} = \frac{13}{5} \} p_3$$

Изчисляване p_3 , което съвпада с p_3 с метода на хеджирането

09.11.2018

Риск и възвръщаемост

1. Риск

Q - изкуствена "безрискова" вероятност

$$\frac{\mathbb{E}_Q d_n}{p_n} = 1 + r$$

(t=T)

P - реални вероятности на състоянията на пазара (t=T)

$$z = \frac{Q}{P}, \text{ т.е. } z \text{ е сл. вел.}$$

$$z(\omega_k) = \frac{Q(\omega_k)}{P(\omega_k)} > 0$$

↓
визуални
ненулеви

Ще наричаме z функция на правдоподобие по аналог с математическата статистика

Ако z е друга сл. вел.

$$\mathbb{E}_P(z) = \mathbb{E}_Q(z), \text{ тъй като}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P(z) &= \sum_{k=1}^K z(\omega_k) P(\omega_k) = \\ &= \sum_{k=1}^K z(\omega_k) \frac{Q(\omega_k)}{P(\omega_k)} P(\omega_k) = \mathbb{E}_Q(z) \end{aligned}$$

В частност, $\mathbb{E}_P(z) = 1$.

2. Възвръщаемост

Разл. n-тия актив.

$$\frac{d_n}{p_n} - 1 = \frac{d_n}{p_n} - \frac{\mathbb{E}_P(d_n)}{p_n} + \frac{\mathbb{E}_P(d_n)}{p_n} - 1$$

μ_n; предсказуема компонентата на възвръщаемостта

възвръщаемост на n-тия актив → x_n; случайна компонентата на възвръщаемостта

Т.е. възвръщаемостта на n-тия актив се представя чрез μ_n + x_n

$$d_n = p_n (1 + \underbrace{\mu_n + x_n}_{\text{възвръщаемост}})$$

оптимална критична област

$$K = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{f(x_1, \dots, x_n | \theta_1)}{f(x_1, \dots, x_n | \theta_0)} > c \right\}$$

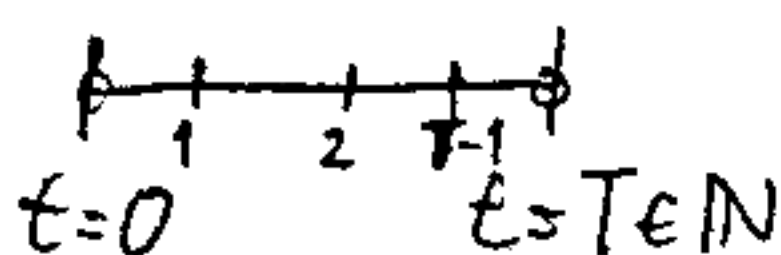
Връзка между z, μ_n и x_n : ^{стремим} ~~имаме~~ ^{вероятност} ~~процес~~ ^{се възпроизвежда} ~~на~~ ^{Бернули} ~~вероятност~~
 $\mu_n - r = -\text{cov}_p(x_n, z)$. Истината, имаме

$$\text{cov}_p(x_n, z) = \underbrace{\mathbb{E}_p(x_n \cdot z)}_{\mathbb{E}_p(x_n)} - \underbrace{\mathbb{E}_p x_n}_{0} \underbrace{\mathbb{E}_p z}_{1} = \mathbb{E}_p(x_n) = \frac{\mathbb{E}_0 d_n}{p_n} - \frac{\mathbb{E}_p d_n}{p_n}$$

$$\mu_n = \frac{\mathbb{E}_p d_n}{p_n} - 1$$

$$r = \frac{\mathbb{E}_0 d_n}{p_n} - 1$$

Модел с дискретно време



В нулевия ~~момент~~ момент от времето, ние отново знаем цените

$P = (p_1, p_2, \dots, p_N)^T$ - начални цени ($t=0$)

$d(t) = (d_1(t), \dots, d_N(t))^T$ - доходности на активите в меморинните моменти от времето ($t=1, 2, \dots, T-1$).

$d(T)$ - финални доходности.

В нулевия момент ~~момент~~, съответствените вектори $d(t)$ са случайни.

Портфейлът се формира в началния момент, може да се реализира и обновява в меморинните моменти и се реализира в крайния момент.

Опр (филтрация) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностно пространство

Ω - множеството от възможни състояния на пазара при $t=T$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ - дискретна σ -алгебра

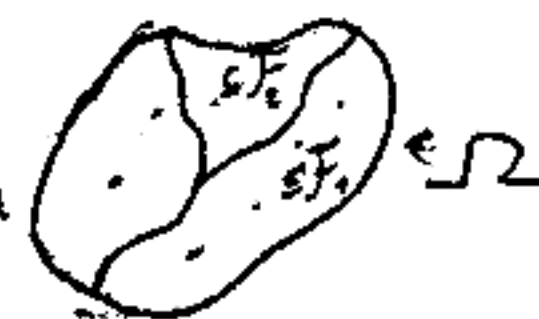
P - реална вероятност на състоянията на пазара

$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T$ - σ -алгебри $(T+1)$ на Брой.

$\{\emptyset, \Omega\}$ $\neq$ Редицата $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_T$ се нарича филтрация

Ключни вероятности и математически
опаковки относително σ -алгебра

Опр. Атоми се наричат по-малки групи от несовместими
събития, σ -алгебра $\mathcal{A} = \sigma(A_1, \dots, A_n, \dots)$



Нека $\mathcal{F}$ -изм. и $\mathcal{A}$ е σ -алгебра, породена от атоми, $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ и

$$\mathbb{E}(z | \mathcal{A}) = \sum_n I_{A_n} \frac{\mathbb{E}(z \cdot I_{A_n})}{P(A_n)}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$
е вер. пр. во

Свойства:

(1) Ако сл. вел. z не зависи от σ -алгебрата $\mathcal{A}$ т.е. z и I_{A_n}
са независими, $n=1, \dots$, то $\mathbb{E}(z | \mathcal{A}) = \mathbb{E}z$

(2) Ако σ -алгебрата $\mathcal{A}$ е тривиална (т.е. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$), то $\mathbb{E}(z | \mathcal{A}) = \mathbb{E}z$

(3) Ако $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са σ -алгебри и $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, то

$$\mathbb{E}(z | \mathcal{A}) = \mathbb{E}z$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(z | \mathcal{A}_1) | \mathcal{A}_1) = \mathbb{E}(z | \mathcal{A}_1)$$

закон за итериранияте опаковки

Нека $A \in \mathcal{A}_1$ е атом. в $\mathcal{A}_1$, но не и в $\mathcal{A}_2$.

Нека A_1, A_2 - атоми на $\mathcal{A}_2$ и $A_1 \cup A_2 = A$.

$$\mathbb{E} \left(\left(I_{A_1} \frac{\mathbb{E}(z \cdot I_{A_1})}{P(A_1)} + I_{A_2} \frac{\mathbb{E}(z \cdot I_{A_2})}{P(A_2)} \right) \cdot I_A \right) \Bigg|_{\substack{\text{изчисляване, че} \\ (I_{A_1} \cdot I_A = I_{A_1})}} \\ P(A)$$



$$= \frac{\mathbb{E} \left(I_{A_1} \frac{\mathbb{E}(z \cdot I_{A_1})}{P(A_1)} + I_{A_2} \frac{\mathbb{E}(z \cdot I_{A_2})}{P(A_2)} \right)}{P(A)} = \frac{\frac{\mathbb{E}(I_{A_1})}{P(A_1)} \mathbb{E}(z \cdot I_{A_1}) + \frac{\mathbb{E}(I_{A_2})}{P(A_2)} \mathbb{E}(z \cdot I_{A_2})}{P(A)}$$

$$= \frac{\mathbb{E}(z \cdot I_{A_1} + z \cdot I_{A_2})}{P(A)} = \frac{\mathbb{E}(z \cdot I_A)}{P(A)}$$

(4) Ако сл. вел. z е измерима относно $\mathcal{F}$ -алгебрата $\mathcal{F}_t$ (т.е. z е константа в-ху всеки един от атомите. A_n), то $E(z|\mathcal{F}_t) = z$. Наименование,

$$E(z|\mathcal{F}_t) = \sum_n I_{A_n} \frac{E(I_{A_n} z)}{P(A_n)} = z$$

Три основни процеса спрямо дадена филтрация:

(1) Согласуван (адаптиран) процес

$$z_1, z_2, \dots, z_T$$

$$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_T$$

Опр. Един процес се нарича согласуван с или адаптиран към дадена филтрация, ако z_n е $\mathcal{F}_n$ -измерима, $n=1, \dots, T$

Пр. 1 Процесът $o(t)$, който представява цените на активите, е согласуван, тъй като във всеки един момент от времето знаем цените на активите във времената $\leq t$.

(2) Предсказуем процес

Опр. Един процес е предсказуем, ако z_n е $\mathcal{F}_{n-1}$ -измерима, $n=1, \dots, T$.

Пр. 2
 $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))^T$

↓ портфейлът е предсказуем процес

(3) Мартинал

Опр. Един процес се нарича мартинал, ако $E(z_n | \mathcal{F}_{n-1}) = z_{n-1}$

Заб. Винаги се, че мартиналите не са предсказуеми процеси. По-точно, ако един мартинал е предсказуем, то той е константа.

Пр. 3 $\underbrace{E a d_n}_{p_n} = 1+r \iff E a \left(\frac{d_n}{1+r} \right) = p_n \mid \mathcal{F}_{t-1} = d_n(t-1) \forall n=1, \dots, T$
 в дискретния модел
 $\frac{d_n(t)}{(1+r)^t}$ е Мартинал
 от простия модел

16.11.2018

Тр. 1 (Мартингал)

Нека сл. вел. z е $\mathcal{F}_T$ -измерима. Процесът $z_t = \mathbb{E}(z | \mathcal{F}_t)$ е мартингал. Може да се докаже, според закона на итерирания математически очаквания,

$$\mathbb{E}(z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(z | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(z | \mathcal{F}_{t-1}) = z_{t-1}$$



$$z(\omega) := \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

z характеризира риска в пробния модел

$$z_t := \mathbb{E}(z | \mathcal{F}_t) \text{ - мартингал}$$

z_t се нарича процес на риска

$$z_T = z \text{ и } z_0 = 1$$

Структура на процеса z_t

Ако $A_1, \dots, A_n$ са атами на $\mathcal{F}_t$, то $z_t = \sum_n \frac{Q(A_n)}{P(A_n)} I_{A_n}$.

Може да се докаже,

$$z_t = \sum_n \frac{\mathbb{E}_P(z I_{A_n})}{P(A_n)} I_{A_n}$$

Но ние знаем, че $\mathbb{E}_P(z I_{A_n}) = \mathbb{E}_Q(I_{A_n})$ (*)

$$\Rightarrow \sum_n \frac{\mathbb{E}_Q(I_{A_n})}{P(A_n)} I_{A_n} = \sum_n \frac{Q(A_n)}{P(A_n)} I_{A_n}$$

Аналогия на (*) за z_t

~~Важно!~~

Ако x_t е съвместим процес, то $\mathbb{E}_P(x_t z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = z_t \mathbb{E}_Q(x_t | \mathcal{F}_{t-1})$

Следователно процесът $x_t z_t$ е мартингал спрямо вероятността P (P -мартингал) $\Leftrightarrow x_t$ е Q -мартингал.

Доказателство

$$\mathbb{E}_P(x_t z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}_P(x_t \mathbb{E}_P(z | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}_P(z x_t | \mathcal{F}_{t-1})$$

Ако $A_1, A_2, \dots$ са атоми на $\mathcal{F}_{t-1}$, то $\mathbb{E}_p(z x_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}_p(z x_t I_{A_n})}{P(A_n)} I_{A_n}$

$$= \sum_n \frac{\mathbb{E}_p(z x_t I_{A_n})}{P(A_n)} I_{A_n} = \sum_n \frac{\mathbb{E}_p(x_t I_{A_n})}{P(A_n)} \frac{Q(A_n)}{Q(A_n)} I_{A_n} = \sum_n \frac{\mathbb{E}_p(x_t I_{A_n})}{P(A_n)} I_{A_n} = \mathbb{E}_p(x_t | \mathcal{F}_{t-1}) I_{A_n}$$

Дискретно стохастично шлетане

1. Квадратична вариација и ковариација

x_t, y_t - процеси

$$[x, y]_t := \sum_{s=1}^t (x_s - x_{s-1})(y_s - y_{s-1})$$

↑ квадратична ковариација

$[x, x]_t$ - квадратична вариација

совместен процес

2. Предсказуема ковариација

$$\langle x, y \rangle_t := \sum_{s=1}^t \mathbb{E}[(x_s - x_{s-1})(y_s - y_{s-1}) | \mathcal{F}_{s-1}]$$

$\langle x, x \rangle_t$ - предсказуема вариација

предсказуем процес

x_t, y_t - мартингал.

Ако $x_t y_t$ е само мартингал, то x_t и y_t се мартингал ортого-
нални. Ако x_t и y_t се независни, то $x_t y_t$ е мартингал.

Покажи,

$$\mathbb{E}(x_t y_t - [x, y]_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(x_t y_{t-1} + x_{t-1} y_t - x_{t-1} y_{t-1} - [x, y]_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) =$$

$$([x, y]_{t-1} + (x_t - x_{t-1})(y_t - y_{t-1}) - [x, y]_{t-1})$$

$$x_t y_t - x_t y_{t-1} - x_{t-1} y_t + x_{t-1} y_{t-1}$$

$$= \mathbb{E}(x_t y_{t-1} + x_{t-1} y_t | \mathcal{F}_{t-1}) - x_t y_{t-1} - [x, y]_{t-1} = 0$$

$$= y_{t-1} \mathbb{E}(x_t | \mathcal{F}_{t-1}) + x_{t-1} \mathbb{E}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) - x_{t-1} y_{t-1} - [x, y]_{t-1} =$$

$$= 2x_{t-1} y_{t-1} - x_{t-1} y_{t-1} - [x, y]_{t-1} = x_{t-1} y_{t-1} - [x, y]_{t-1}$$

~~Ако x_t е предсказуем мартингал, то~~

~~то~~

Ако x_t е предсказуем мартингал, то

$$x_t \stackrel{\text{предсказуемост}}{\downarrow} \mathbb{E}(x_t | \mathcal{F}_{t-1}) \stackrel{\text{мартингалност}}{\uparrow} = x_{t-1}$$

предсказуемост

т.е. x_t е константен процес.

Ако $\langle x_t, y_t \rangle = 0$ или $[x_t, y_t] = 0$, то x_t и y_t са взаимно ортогонални мартингал.

3. Стохастичен интеграл

d_t - процесът, който интегрираме
 x_t - процесът, по който интегрираме

$$(d \circ x)_t := \sum_{s=1}^t d_s (x_s - x_{s-1})$$

~~Ако d е предсказуем, а x_t е мартингал, то $(d \circ x)_t$ също е мартингал.~~

Ако d е предсказуем, а x_t е мартингал, то $(d \circ x)_t$ също е мартингал. Наистина,

$$\mathbb{E}((d \circ x)_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{s=1}^t d_s (x_s - x_{s-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{s=1}^{t-1} d_s (x_s - x_{s-1}) + d_t (x_t - x_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right) =$$

$$= (d \circ x)_{t-1} + \mathbb{E}(d_t (x_t - x_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}) = (d \circ x)_{t-1} + d_t \underbrace{\mathbb{E}(x_t - x_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1})}_0$$

Интеграл на Гюнте (за абелеви)

~~Ако f е предсказуем, а g е мартингал, то~~

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (g(x_i) - g(x_{i-1}))$$

$$\text{Var}_a^0 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(s_{i-1})|^2$$

$$\text{Var}_a^2 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(s_{i-1})|^2$$

ако f е липшиц, $|f(z_i) - f(z_{i-1})| \leq M \Delta z_i$

4. Стохастична експонента

$$\frac{dx_t}{x_t} = dw_t \Rightarrow x_t = e^{w_t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{обикновена експонента (за детерминистична)} \\ \text{стохастична експонента} \end{array} \right.$$

$$dx_t^{x_t - x_{t-1}} = x_t dw_t - \text{Уравнение на Дoleans}$$

Решението на това уравнение се нарича стохастична експонента и се означава с $\xi(t)$

$$x_1 x_1 - x_0 = x_0 (w_1 - w_0)$$

$$x_1 = x_0 (1 + w_1 - w_0)$$

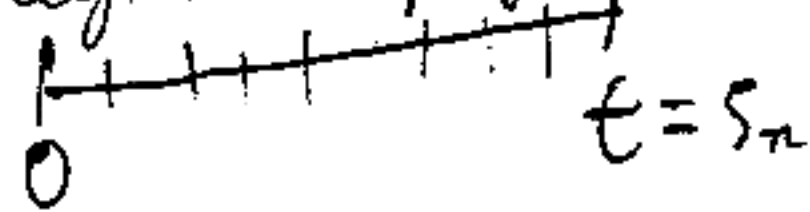
$$x_2 x_2 - x_1 = x_1 (w_2 - w_1)$$

$$x_2 = x_1 (1 + w_2 - w_1) = x_0 (1 + w_1 - w_0) (1 + w_2 - w_1)$$

$$\text{Аналогично, } x_t = x_0 \underbrace{\prod_{s=1}^t (1 + w_s - w_{s-1})}_{\xi_t(w)}$$

Заб. Обикновено взимаме x_0 да бъде равно на 1

Това е аналогично на линейното преобразуване на e^x :



$$w_t = \underbrace{w_{s_n} - w_{s_{n-1}}}_{\text{напр. на } w} + \underbrace{w_{s_{n-1}} - w_{s_{n-2}}}_{\text{напр. на } w} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{w_t} = e^{w_{s_n} - w_{s_{n-1}}} e^{w_{s_{n-1}} - w_{s_{n-2}}} \dots$$

Ако w_t е мартингал, то $\xi_t(w)$ също е мартингал. Наимено,

$$\mathbb{E}(\xi_t(w) | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}\left(x_0 \prod_{s=1}^t (1 + w_s - w_{s-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(x_0 \left(\prod_{s=1}^{t-1} (1 + w_s - w_{s-1}) \right) (1 + w_t - w_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = \xi_{t-1}(w)$$

Свойството $e^x e^y = e^{x+y}$ има следната аналогия за стохастичната експонента:

$$\xi_t(w_1) \cdot \xi_t(w_2) = \xi_t(w_1 + w_2 + [w_1, w_2]).$$

Наимено,

$$\xi_t(u) = \prod_{s=1}^t (1 + u_s - u_{s-1}) \dots; (1 + w_s - w_{s-1}) (1 + u_s - u_{s-1}) = 1 + \underbrace{w_s - w_{s-1}}_{\text{напр. на } w} + \underbrace{u_s - u_{s-1}}_{\text{напр. на } u} + \underbrace{(w_s - w_{s-1})(u_s - u_{s-1})}_{\text{напр. на } [w, u]}$$

23.11.2018

Т-ма (Гурсков) $z_t = \mathbb{E}\left(\frac{Q}{P} \mid \mathcal{F}_t\right)$

Ако x_t е P -мартинал, то процесите

$$x_t - \int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s}$$

$x_t - \int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s}$ са мартинали спрямо Q .

Д-во

$$\mathbb{E}_Q\left(x_t - \int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = \mathbb{E}_Q(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) - \mathbb{E}_Q\left(\int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) =$$

$$= \mathbb{E}_Q(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) - \int_0^{t-1} \frac{d[x, z]_s}{z_s} - \mathbb{E}_Q\left(\frac{(x_t - x_{t-1})(z_t - z_{t-1})}{z_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) =$$

$$= x_{t-1} - \int_0^{t-1} \frac{d[x, z]_s}{z_s} + z_{t-1} \mathbb{E}_Q\left(\frac{x_t - x_{t-1}}{z_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$$

Умножаваме $\mathbb{E}_P(x_t z_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = z_{t-1} \mathbb{E}_Q(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q\left(x_t - \int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) &= x_{t-1} - \int_0^{t-1} \frac{d[x, z]_s}{z_s} + \underbrace{\mathbb{E}_P\left(z_t \frac{x_t - x_{t-1}}{z_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}_0 = \\ &= x_{t-1} - \int_0^{t-1} \frac{d[x, z]_s}{z_s} \end{aligned}$$

За друга проекция аналогично

Теорема за представяне

d_t - предказуем

W_t - мартинал

Тогава $\int_0^t d_s dw_s$ - мартинал

Теоремите за представяне "обръщат" този резултат.

Нека $x_1, \dots, x_t, \dots$ - процес

Построяване филтрация:

$$F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$F_1 = \sigma(x_1)$ - минималната σ -алгебра, отнасно която x_1 е измерима

$$F_2 = \sigma(x_1, x_2)$$

$\vdots$

$$F_t = \sigma(x_1, \dots, x_t)$$

$\vdots$

По този начин образуваме филтрация, с която процесът е съгласуван. Наричаме я филтрация, породена от x_t .

Т-ма 1 Ако w_t е процес, взгн. тази филтрация с $\{F_t\}_{t \geq 0}$. Суренно тази филтрация процесът е мартингал.

Ако x_t е процес, съгласуван с F_t филтрация, то x_t може да се представи във вида $x_t = \int_0^t d_s dv_s$, където d_s е предиказуем.

Т-ма 2 Ако в условията на т-ма 1 процесът $x_t > 0$, то x_t е стохастичен експонент от процес, който е стохастичен интеграл:

$$x_t = E_t[d \circ w]$$

Представяне на $d \circ w$

Т-ма 1 Всеки съгласуван процес може да се представи като сума на мартингал и предиказуем процес и това представяне е единствено с точност до константа

Д-во Трябва да покажем, че $x_t = d_t + \overset{\text{мартингал}}{w_t}$: по индукция

$$d_t = \begin{cases} a, & t=0 \\ d_{t-1} + x_{t-1} + E(x_t | F_{t-1}), & t \geq 1 \end{cases}$$

За $t=0$ ~~т.б.~~ е очевидно.

$$w_t = \begin{cases} x_0 - a, & t=0 \\ w_{t-1} + x_t - E(x_t | F_{t-1}), & t \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Индукция. } d_t + w_t = w_{t-1} + x_t - x_{t-1} + d_{t-1} \stackrel{(\text{из пред.})}{=} x_t - x_{t-1} + x_{t-1} = x_t$$

P - вероятность на состояниях на шаге
 Примем, что имеем всего два актива:

Актив 1: Безрисков, r -процент, т.е. $p_{1,t} = (1+r)^t$

Актив 2: рисков, $p_{2,t}$ - цена на актив

Формируем безрисковую вероятность Q ,

$$\frac{\mathbb{E}_Q(p_{2,t} | \mathcal{F}_{t-1})}{p_{2,t-1}} = 1+r, \text{ т.е.}$$

$$\frac{p_{2,t}}{(1+r)^t} \text{ е } Q\text{-мартингал}$$

Возвращаемость: $\frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} = 1 = \underbrace{\mu_t + w_t}_{\text{предполагаем прогноз мартингал по } t\text{-на на дроб.}}$

$$\mu_t = \frac{\mathbb{E}_P(p_{2,t} | \mathcal{F}_{t-1})}{p_{2,t-1}} - 1$$

$$w_t = \frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} - \frac{\mathbb{E}_P(p_{2,t} | \mathcal{F}_{t-1})}{p_{2,t-1}} + w_{t-1}$$

$$\Rightarrow \frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} = 1 + \mu_t + w_t - w_{t-1}$$

$$\Rightarrow p_{2,t} = p_{2,t-1}(1 + \mu_t + w_t - w_{t-1}) = \dots = p_{2,0} \prod_{s=1}^t (1 + \mu_s + w_s - w_{s-1})$$

Типичный пример

$$\mathbb{E}_Q \frac{d_2}{p_2} = 1+r$$

~~предполагаем~~ $\frac{d}{p} - 1 = \mu + x$
 предполагаем компоненту
 компонента
 компонента

$$\mu = \frac{\mathbb{E}_P d}{p} - 1$$

$$x = \frac{d}{p} - \frac{\mathbb{E}_P d}{p}$$

$$Z_t = \mathbb{E}_P\left(\frac{Q}{P} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$\frac{P_{t,t}}{(1+r)^t} = P_{2,0} \prod_{s=1}^t \frac{(1 + \mu_s + w_s - w_{s-1})}{1+r}$$

Теорема Q: $\mathbb{E}_Q\left(\frac{1 + \mu_t + w_t - w_{t-1}}{1+r} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1 \Leftrightarrow$ ^{теорема Z:} $1 + \mu_t + \frac{\langle w, z \rangle_t - \langle w, z \rangle_{t-1}}{Z_{t-1}} = 1 + r$

Узнаване теоремата на Гурсанов:

$$V_t = W_t - \int_0^t \frac{d\langle w, z \rangle_s}{Z_{s-1}} \text{ е } Q\text{-мартингал.}$$

$$\Rightarrow W_t - W_{t-1} = \underbrace{V_t - V_{t-1}}_{\text{скачане}} + \cancel{\text{скачане}} \cdot \frac{\langle w, z \rangle_t - \langle w, z \rangle_{t-1}}{Z_{t-1}}$$

$$\cancel{\text{скачане}}$$

Узнаме $\frac{\langle w, z \rangle_t - \langle w, z \rangle_{t-1}}{Z_{t-1}} = r - (\mu_t - r)$

По втората теорема за представянето

$$Z_t = E_t(\beta \circ w)$$

~~Свещдане~~ Свещдане теоремата на Z до теоремата на предизказуем процес P

От това, че Z_t е стохастична експонента $\Rightarrow Z_t = Z_{t-1} \beta_t (w_t - w_{t-1})$
 $\Rightarrow Z_t - Z_{t-1} = Z_{t-1} (\beta_t (w_t - w_{t-1}) - 1) \quad (1)$

$$\Rightarrow \frac{\langle w, z \rangle_t - \langle w, z \rangle_{t-1}}{Z_{t-1}} = \mathbb{E}_P((w_t - w_{t-1})(Z_t - Z_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}). \text{ Използваме (1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle w, z \rangle_t - \langle w, z \rangle_{t-1}}{Z_{t-1}} = \beta_t \mathbb{E}_P((w_t - w_{t-1})^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}) = r - \mu_t$$

$$\Rightarrow \beta_t = \frac{r - \mu_t}{\langle w, w \rangle_t} \Rightarrow Z_t = \prod_{s=1}^t (1 + \beta_s (w_s - w_{s-1})) \Rightarrow Q = Z_T \cdot P$$

Ако имаме трет актив на пазара, който е call-опция
върху актив 2, то $p_{3,t} = \mathbb{E}_Q \left(\frac{\max(p_{2,T} - K, 0)}{(1+r)^{T-t}} \middle| \mathcal{F}_t \right)$ - цена в момента от
време t .

30.11.2018

Модел на Фуке-Малк

Непрерывное время



Броуновото движение

 B_t - семейство от случайни величини, $0 \leq t \leq T$ 

$B: \begin{cases} \Omega \rightarrow ([0, T]) \\ \omega \mapsto B_\cdot(\omega) \end{cases}$ - алтернативна дефиниция
на непрекъснат процес: при $\omega \in \Omega$ съответства
траектория

$Z: \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto Z(\omega) \end{cases}$ - случайна величина (за сравнение по
дефинициите)

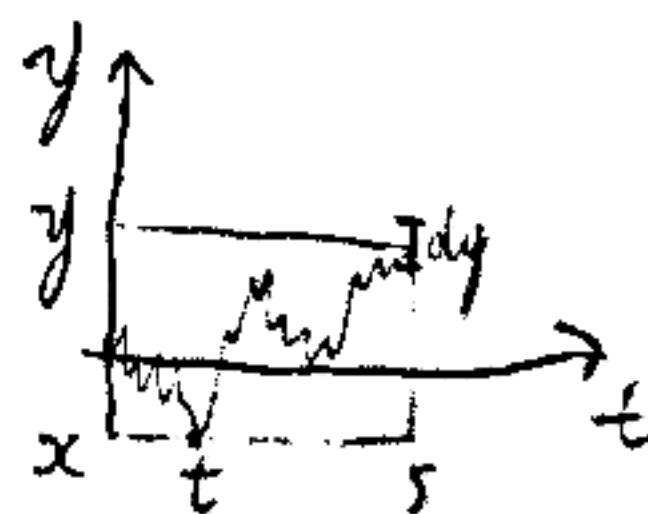
1) $B_0 = 0$

2) $t < s < u < v$. Тогава нарастванията $B_s - B_t$ и $B_v - B_u$ са независими

3) $B_s - B_t \in \text{~~scribble~~} N(0, s-t)$

4) Трёхъгълна вероятност: $\frac{P(\text{~~scribble~~} \in dy | B_t = x)}{dy} =: p(t-s, x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}$

$$B_s = \underbrace{B_t}_x + \underbrace{B_s - B_t}_{\in N(0, s-t)} \in N(x, s-t)$$



Квадратична вариация на Броуновото движение

 $f(t), t \in [a, b]$ ~~scribbled out text~~

$$\text{Var}_{[a, b]}(f) := \lim_{\max(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2$$

$$[f, f] = \lim_{\max(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2$$

Пр.1 Var $[0, \pi]$ (sim) = 2

Ако $f \in C^1([a, b])$

$$[f, f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f'(z_i))^2 (t_i - t_{i-1})^2 \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \cdot n \cdot (\max(t_i - t_{i-1}))^2 = 0$$

$$[B, B]_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \underbrace{(B_{\frac{i}{n}} - B_{\frac{i-1}{n}})^2}_{\in N(0, \frac{t}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \underbrace{D(B_{\frac{i}{n}} - B_{\frac{i-1}{n}})}_{\frac{t}{n}} = t$$

$$\text{Var } B_{[0,1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |B_{\frac{i}{n}} - B_{\frac{i-1}{n}}| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (B_{\frac{i}{n}} - B_{\frac{i-1}{n}})^2}{\max_{1 \leq i \leq n} |B_{\frac{i}{n}} - B_{\frac{i-1}{n}}|} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

формула на Ито

$f(t, x)$ — гладка (C^1) функция

$$df(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dx$$

Ако x зависи от t :

$$df(t, x_t) = \frac{\partial f(t, x_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, x_t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt$$

което следва от:

$$f(t, x_t) - f(s, x_s) = \frac{\partial f(s, x_s)}{\partial t} (t - s) + \frac{\partial f(s, x_s)}{\partial x} (x_t - x_s) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (s, x_s) (t - s)^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} (s, x_s) (t - s) (x_t - x_s) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (s, x_s) (x_t - x_s)^2 \right) + \dots$$

Ако вземем $x_t = B_t$, получаваме член от ~~горното~~ ~~разлагане~~ не излиза при $|t - s| \rightarrow 0$:

← формула на Ито.

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f(t, B_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, B_t)}{\partial x} dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, B_t)}{\partial x^2} dt$$

Ако квадратичната вариация на x_t и y_t е 0, тогава е в сила:

$$d(x_t y_t) = x_t dy_t + y_t dx_t$$

$$t \rightarrow x_t$$

$$B_t \rightarrow y_t$$

$$f(t, x) = tx$$

$$d(x_t, y_t) = y_t dx_t + x_t dy_t + d[x, y]_t$$

Стохастичен интеграл по Брауновото движение

В дискретна случай: d_t, x_t (интегриране по партитиал)
 $(d \circ x)_t := \sum_{i=1}^t d_i (x_i - x_{i-1})$

В непрекъснатия случай:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n d_{t_i} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) =: (d \circ x)_t$$

Ако x_t е с ограничена вариация ~~тогава~~,
* $(d \circ x)_t$ се свеща до интеграл на Риман, а при диференцируе-
ми x_t - директно от риманов интеграл.

При $x_t = B_t$ можем да запишем $(d \circ B)_t = \int_0^t d_s dB_s$

07.12.2018

Зад. B_t е мартингал относно ~~информационната~~ филтрацията, породена от него, т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. Това следва от непрекъснатите кармани

$$\mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$$

В дискретния случай, ако d_t е предсказуем процес и W_t е мартингал, дефинираме

$$(d \circ W)_t = \sum_{s=1}^t d_s (W_s - W_{s-1})$$

↑
мартингал

Ако d_t е предсказуем процес, то $\int_0^t d_s dB_s$ е също мартингал

↓
 d_t е измерим отн. $\mathcal{F}_{t-} = \sigma(B_s, s < t) \quad \forall t$

Стохастична експонента на B_t

$$d \varepsilon_t(B) = \varepsilon_t(B) dB_t$$

уравнение на Далеан

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \underbrace{\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) \right) ds}_{\text{интеграл на Рундан}} + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s}_{\text{стохастичен интеграл}}$$

мартингал

формула на Ито в интегрален вид

$$f(t, x) = e^{x - \frac{t}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = e^{x - \frac{t}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -\frac{1}{2} e^{x - \frac{t}{2}}$$

$$d e^{B_t - \frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} e^{B_t - \frac{t}{2}} dt + e^{B_t - \frac{t}{2}} dB_t + \frac{1}{2} e^{B_t - \frac{t}{2}}$$

$\Rightarrow$ търсената стохастична експонента е точно $\varepsilon_t(B) = e^{B_t - \frac{1}{2}t}$

$\uparrow$
също е мартингал

Т-ма (Гирсанов) Ако B_t е Брауново движение, то $B_t - t$ е също Брауново движение относно вероятността

$$e^{(B_t - \frac{t}{2})} P =: Q, \text{ т.е.}$$

$$Q(A) = \mathbb{E}_P \left(e^{B_T - \frac{T}{2}} \mathbf{1}_A \right)$$

Ако $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$, разменим

$$P(B_{t_1} \in dx_1, B_{t_2} \in dx_2, \dots, B_{t_n} \in dx_n) \quad (1)$$

$$p(t, x, y) = \frac{P(B_t \in dy | B_0 = x)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} dx_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}} dx_2 \cdots = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} e^{-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}} dx_i \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n (t_i-t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-x_{i-1})^2}{t_i-t_{i-1}}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

В дискретния случай:

Q - Гирсанова вероятност

P - истинска вероятност

$$z(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$$Z_t = \mathbb{E}(z | \mathcal{F}_t)$$

Т-ма (Гирсанов)

Ако Z_t - P -мартингал,

$$\text{то } x_t = \int_0^t \frac{d[x, z]_s}{Z_s}$$

е Q -мартингал

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{B}_t + t$$

$$P(y_{t_1} \in dx_1, y_{t_2} \in dx_2, \dots, y_{t_n} \in dx_n) = P(B_{t_1} \in dx_1, B_{t_2} \in dx_2, \dots, B_{t_n} \in dx_n) \\ = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3)$$

$$\frac{(3)}{(1)} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{((x_i - x_{i-1}) - (t_i - t_{i-1}))^2}{t_i - t_{i-1}} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-2(t_i - t_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}} = e^{\overbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})}^{x_n} - \frac{1}{2} \overbrace{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}^{t_n}} =$$

$$= e^{x_n - \frac{1}{2} t_n} = e^{B_T - \frac{T}{2}}$$

$$\Rightarrow P_y = (e^{B_T - \frac{T}{2}})P, \text{ т.е. } \mathcal{F}_t = t \text{ е Брауново движение}$$

Теоретично Брауново движение:

$$dX_t = X_t (\mu dt + \sigma dB_t)$$

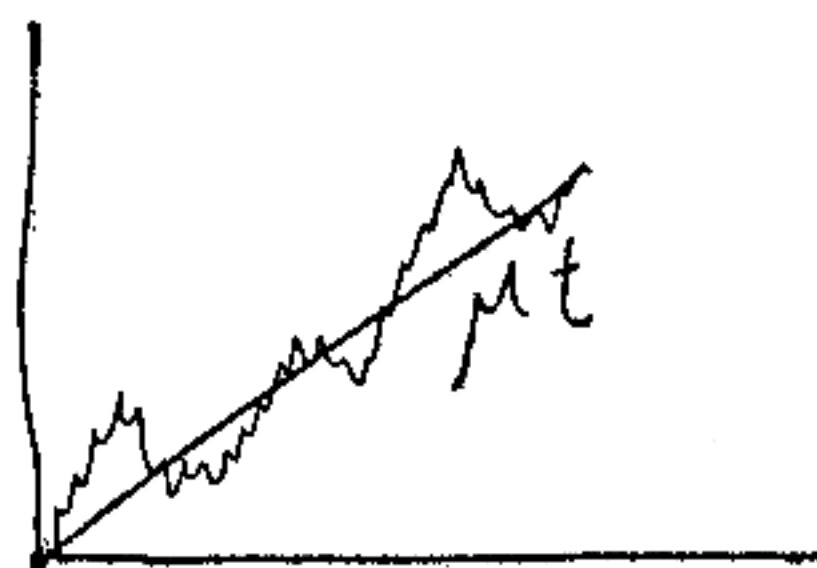
μ - trend

σ - volatility

$$X_t = \mathcal{E}_t(\mu t + \sigma B_t) = e^{\mu t} \mathcal{E}_t(\sigma B_t) =$$

$$= e^{\mu t} e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t} = e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) t}$$

реал. Брауново движение



Т-мал (за представяне на мартингал, ~~Кунгити - Барташова~~)

Ако X_t е мартингал отн. филтрацията $\mathcal{F}_t$, породена от B_t ,
То $X_t = \int_0^t d_t dB_t$, където d_t е предизказан процес.

Ако освен това $X_t > 0$, то $X_t = \mathcal{E}_t(\int_0^t d_s dB_s)$

14.12.2018

T -мартингал (Фурканов) B_t - стандартное броуновское движение в $[0, T]$

$$Q(A) := \mathbb{E}_P(e^{F_T - \frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(s) ds} I_A) ; A \in \mathcal{F}_T$$

$\Rightarrow B_t - \int_0^t \theta(s) ds$ е Q -стандартное броуновское движение

$$X_t = \int_0^t \theta(s) dB_s$$

$$Q(A) := \mathbb{E}_P(e^{\int_0^T \theta(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(s) ds} I_A) ; A \in \mathcal{F}_T$$

$\Rightarrow B_t - \int_0^t \theta(s) ds$ е Q -стандартное броуновское движение

↑
обобщение на
мартингал по Фурканов

На рынке имеют два актива: акции и деривативы.

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s) ds} \quad \text{удовлетворяет ОДУ} \quad dD(t) = -R(t)D(t)dt$$

↑
дериватив

акции

$$S(t) = e^{\int_0^t \sigma(s) dB_s + \int_0^t (\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}) ds} \quad \text{удовлетворяет}$$

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dB_t)$$

Теорема Серрнкова вероятности ~~такова~~ такова, что

$D(t)S(t)$ е Q -мартингал

~~такова~~

$$d(D(t)S(t)) = D(t)dS(t) + S(t)dD(t) = D(t)S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dB_t) - S(t)D(t)R(t)dt$$

$$\frac{d(D(t)S(t))}{dt} = \delta(t)S(t)D(t) \left(\underbrace{dB_t + \frac{\mu(t) - R(t)}{\delta(t)} dt}_{\text{е само спонтанно движение.}} \right)$$

уже в озн. с $\tilde{B}_t$

Озн. $\theta(t) = \frac{\mu(t) - R(t)}{\delta(t)}$
 Тогда $Q(A) = E_p \left(e^{-\int_0^T \theta(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(s) ds} \right) \mathbb{1}_A$

$$d(D(t)S(t)) = \delta(t)S(t)D(t) d\tilde{B}_t$$

$\Rightarrow D(t)S(t)$ е $\mathbb{Q}$ -мартигал

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \delta(t)dB_t)$$

$$B_t + \int_0^t \theta(s)ds = \tilde{B}_t$$

$$B_t = \tilde{B}_t - \int_0^t \theta(s)ds$$

$$dB_t = d\tilde{B}_t - \theta(t)dt$$

$$\Rightarrow dS(t) = S(t) \left(\mu(t)dt - \underbrace{\delta(t)\theta(t)dt}_{R(t) - \mu(t)} + \delta(t)d\tilde{B}_t \right) =$$

$$= S(t) (R(t)dt + \delta(t)d\tilde{B}_t)$$

$\Delta(t) = \#$ акций с които разпоразаме във време t
 от рисковия актив

$\Delta(t)S(t)$ ← цена на една акция

стоимост на портфелиа, инвестиран в рисковия актив

Да означим с $X(t)$ капитал в момент t

$$X(t) - \Delta(t) S(t)$$

капитал от безрисковния актив

~~капитал от безрисковния актив~~

$$dX(t) = \Delta(t) dS(t) + (X(t) - \Delta(t) S(t)) R(t) dt = \Delta(t) (dS(t) - S(t) R(t) dt) + X(t) R(t) dt \quad (1)$$

$$dS(t) = S(t) (R(t) dt + \sigma(t) d\tilde{B}_t) = S(t) R(t) dt + S(t) \sigma(t) d\tilde{B}_t$$

$$\Rightarrow (1) = \Delta(t) \sigma(t) S(t) d\tilde{B}_t + X(t) R(t) dt$$

$$d(D(t) X(t)) = \underset{(1)}{D(t) dX(t)} + \underset{dD(t) = -D(t) R(t) dt}{X(t) dD(t)} \text{ е } Q\text{-мартинал}$$

~~е~~ Мартинал, от горните разглеждания.

$$\Rightarrow d(D(t) X(t)) = \Delta(t) D(t) \sigma(t) S(t) d\tilde{B}_t$$

Намиране на цената на дериватите по метода на хеджирането

цена на
V-финансов дериват в-юу рисковния актив

$V(t)$ - финална доходност на ~~финансов~~ V

При европейската кол опция $V(t) = \max(S(t) - K, 0)$

Нека X - портфейл, таков че $X(t) = V(t)$

Търсим:

$$V(0), V(t), t < T$$

откъдето е:

$$V(t) = X(t)$$

$$\uparrow \text{Q-мартинал} ; \quad D(t) X(t) = E_Q \left(\frac{D(T) X(T)}{D(t)} \mid \mathcal{F}_t \right)$$

$$\Rightarrow V(t) = E_Q \left(\frac{D(T)}{D(t)} V(T) \mid \mathcal{F}_t \right)$$

$$\Rightarrow V(t) = \mathbb{E}_Q(V(T) | \mathcal{F}_t)$$

формула на Блэк - Шоулс

Три оригинални модели на Блэк - Шоулс:

$$\sigma(t) = \sigma \leftarrow \text{константа}$$

$$\mu(t) = \mu$$

$$R(t) = R$$

$$V(t) = \mathbb{E}_Q(\max(S(T) - K, 0) | \mathcal{F}_t)$$

$$S(t) = e^{\sigma \tilde{B}_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

$$S(T) = S(t) e^{\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}$$

$$\Rightarrow V(t) = \text{~~max(S(T) - K, 0)~~}$$

$$C(t, S(t))$$

функция на цена на опцион

$$C(t, x) = \mathbb{E}_Q(\max(x e^{\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K, 0) | S(t) = x)$$

Но $\tilde{B}_T - \tilde{B}_t \in N(0, T-t) \Rightarrow \tilde{B}_T - \tilde{B}_t = \sqrt{T-t} y$, където $y \in N(0, 1)$.

$$\Rightarrow C(t, x) = e^{-R(T-t)} \mathbb{E}_Q(\max(x e^{\sigma\sqrt{T-t} y + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K, 0)) =$$

$$= e^{-R(T-t)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \max(x e^{\sigma\sqrt{T-t} y + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K, 0) dy$$

Формула y , за която

$$x e^{\sigma\sqrt{T-t} y + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} > K$$

$$\sigma\sqrt{T-t} y + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) > \ln \frac{K}{x} \Rightarrow y > \frac{\ln \frac{K}{x} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Означ. сдв 2



$$\Rightarrow c(t, x) = \frac{e^{-R(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \left(x e^{\delta y + (\mu - \frac{\delta^2}{2})\tau} - k \right) dy =$$

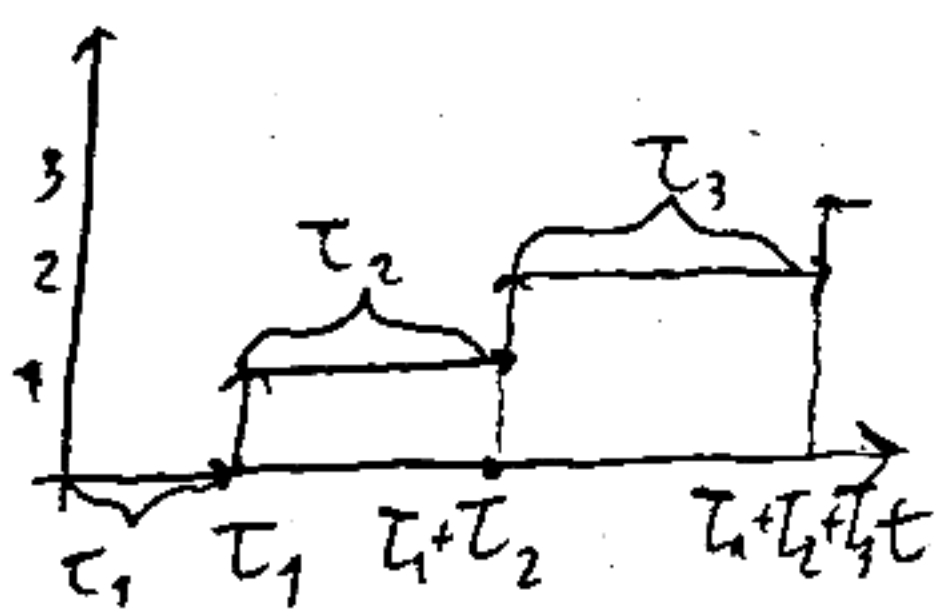
$$= I_1 + I_2, \text{ където}$$

$$I_1 = \frac{e^{-R(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} x \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta y + (\mu - \frac{\delta^2}{2})\tau} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$I_2 = \frac{e^{-R(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} (-k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

09.01.2019

Процес на Пуассон - $N(t)$



$\tau_i \in \text{Exp}(\lambda)$ са независими

$$S_1 = \tau_1$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$$

$\nwarrow$ процес на възстановяване

S_n има разпределение на Ерланг

$$f_n(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

$$N(t) = k \Leftrightarrow S_k \leq t < S_{k+1}$$

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= P(S_k \leq t < S_{k+1}) = P(S_{k+1} > t) - P(S_k > t) = \\ &= 1 - P(S_{k+1} \leq t) - (1 - P(S_k \leq t)) = P(S_k \leq t) - P(S_{k+1} \leq t) = \end{aligned}$$

~~$$\int_0^t f_k(t) dt - \int_0^t f_{k+1}(t) dt$$~~

$$\int_0^t f_{k+1}(t) dt = \lambda \int_0^t \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt = - \int_0^t \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} d e^{-\lambda t} =$$

$$= - \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt = - \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + \int_0^t f_k(t) dt$$

$$\Rightarrow P(N(t)=k) = - \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow N(t) \in Po(\lambda t)$$

$$MGF_{N(t)}(u) = E(e^{uN(t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ku} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} =$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^u \lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda t(e^u - 1)}$$

3 - и. вел.

~~PGF₃(u) = E(u³)~~
 поразителна функция

MGF₃(u) = E(e^u) = PGF(e^u)
 поразителна функция на моментите

Озм. $J(t) = N(t) - \lambda t$. $J(t)$ е мартовина. Мамотина,

$$E(N(t) - \lambda t | \mathcal{F}_s) = E(N(t) + N(s) - N(s) - \lambda t + \lambda s - \lambda s | \mathcal{F}_s) =$$

$$= N(s) - \lambda s + E(\underbrace{N(t) - N(s)}_{\text{не зависи от } \mathcal{F}_s} - \lambda(t-s) | \mathcal{F}_s) = N(s) - \lambda s + \underbrace{E(N(t) - N(s))}_{=0} - \lambda(t-s)$$

поради инката на парамет на Exp(N)

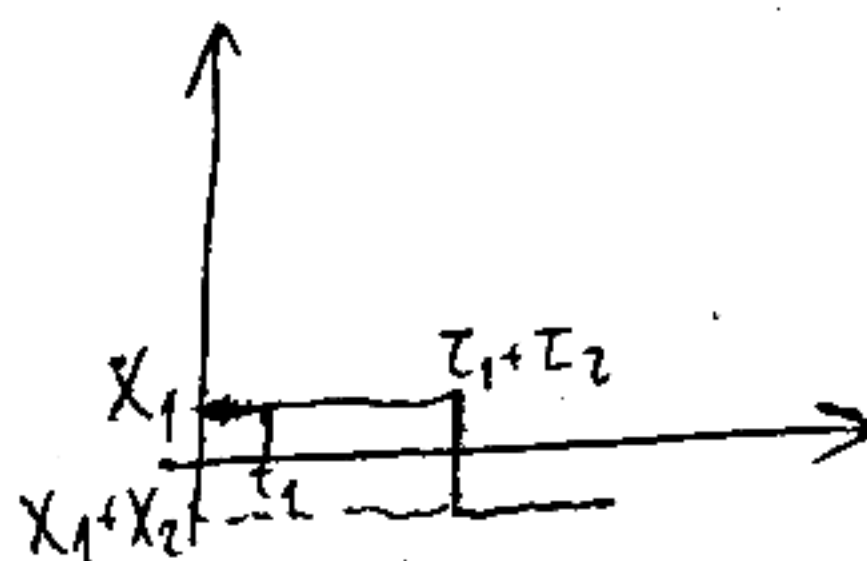
$J(t)$ се нарича компенсиран процес с компенсатор λt .

Составен поасонов процес (Compound Poisson process)

~~Опр.~~ Опр. Нека $N(t)$ е поасонов процес с параметер λ , а $X_1, \dots, X_n, \dots$ са независими еднакво разпределени случайни величини, които не зависят от $N(t)$. Составен поасонов процес наричаме:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

(приемаме, че $\sum_{i=1}^0 = 0$)



$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Q(t)) &= \sum_{i=0}^{\infty} i \mathbb{E}(X_i) \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} = \mathbb{E}(X_1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{(i-1)!} e^{-\lambda t} = \\ &= \mathbb{E}(X_1) e^{-\lambda t} (\lambda t) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \lambda t \mathbb{E}(X_1) e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t \mathbb{E}(X_1) \end{aligned}$$

$$MGF_{Q(t)}(u) = \mathbb{E}(e^{u Q(t)}) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} e^{u \sum_{j=1}^i X_j} P(N(t)=i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^i \mathbb{E} e^{u X_j} \right) P(N(t)=i) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{E} e^{u X_1} \lambda t)^i}{i!} = e^{-\lambda t} e^{\mathbb{E} e^{u X_1} \lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t (MGF_{X_1}(u) - 1)}$$

Ако $MGF_{X_1}(u) = e^u$, получаваме MGF на стандартния поасонов процес.

Ако X_1 е дискретна случайна величина със стойности $x_1, \dots, x_n$ и вероятности $P(X_1 = x_i) = p_i$, то

$$MGF_{X_i}(u) = \sum_{i=1}^n e^{u x_i} p_i$$

$$MGF_{Q(t)}(u) = e^{\lambda t \left(\sum_{i=1}^n e^{u x_i} p_i - 1 \right)} = e^{\lambda t \left(\sum_{i=1}^n p_i (e^{u x_i} - 1) \right)}$$

$$= \prod_{i=1}^n e^{\lambda t p_i (e^{u x_i} - 1)}$$

Всеки множител в това произведение е поратифицирана функция на моментите на بواسонов процес с интензивност λp_i и величина на скока x_i .

Това означава, че

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t) x_i,$$

където $N_i(t)$ е بواسонов процес с интензивност λp_i

~~Структура на ценовите процеси с поковни~~
Структура на ценовите процеси с поковни

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s + Q(t)$$

Стохастичен интеграл

$$\int_0^t \alpha(s) dQ(s) = \sum_{s \leq t} \alpha(s) \Delta Q(s)$$

$\Delta Q(s) = Q(s) - Q(s-)$
 $\lim_{u \uparrow s} Q(u)$

Тази сума е добре дефинирана, тъй като има само краен брой ненулеви стойности

В дискретна ситуация

$$(\alpha dX)_t = \sum_{i=1}^t \alpha_i (x_i - x_{i-1})$$

Δx_i

Квадратна вариация и ковариация

$Q_1(t), Q_2(t)$ - процеси (скокoобразни)

$$[Q_1, Q_2]_t := \sum_{s \leq t} (Q_1(s) - Q_1(s-)) (Q_2(s) - Q_2(s-))$$

В дискретна случай

$$[x, y]_t := \sum_{i=1}^t (x_i - x_{i-1}) (y_i - y_{i-1})$$

За да имаме ненулева квадратна ковариация, трябва и двата процеса да ~~променят~~ имат скокове едновременно

Стохастична експонента

$$E_t(Q) := \prod_{s \leq t} (1 + \Delta Q(s))$$

$$E_t(N) = 2^{N(t)}$$

В дискретна случай

$$E_t(x) := \prod_{i=1}^t (1 + \underbrace{x_i - x_{i-1}}_{=\Delta x_i})$$

Теорема на Бирингов

$N_1(t)$ - Пуассонов процес с интензивност λ

$N_2(t)$ - Пуассонов процес с интензивност $\tilde{\lambda}$

$$P(N_2(t_1) = x_1, N_2(t_2) = x_2, \dots, N_2(t_n) = x_n)$$

$$P(N_1(t_1) = x_1, N_1(t_2) = x_2, \dots, N_1(t_n) = x_n)$$

$$= \frac{P(N_2(t_1) = x_1, N_2(t_2) - N_2(t_1) = x_2 - x_1, \dots, N_2(t_n) - N_2(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1})}{P(N_1(t_1) = x_1, N_1(t_2) - N_1(t_1) = x_2 - x_1, \dots, N_1(t_n) - N_1(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1})}$$

$$= \left(\prod_{i=2}^n \frac{P(N_2(t_i) - N_2(t_{i-1}) = x_i - x_{i-1})}{P(N_1(t_i) - N_1(t_{i-1}) = x_i - x_{i-1})} \right) \frac{P(N_2(t_1) = x_1)}{P(N_1(t_1) = x_1)} =$$

~~$\mathbb{E} \left[\prod_{i=2}^n \frac{(\tilde{\lambda}(t_i - t_{i-1}))^{x_i - x_{i-1}}}{(x_i - x_{i-1})!} e^{-\tilde{\lambda}(t_i - t_{i-1})} \right] \frac{(\tilde{\lambda} t_1)^{x_1}}{x_1!} e^{-\tilde{\lambda} t_1}$~~

$$= \left(\prod_{i=2}^n \frac{(\tilde{\lambda}(t_i - t_{i-1}))^{x_i - x_{i-1}}}{(x_i - x_{i-1})!} e^{-\tilde{\lambda}(t_i - t_{i-1})} \right) \frac{(\tilde{\lambda} t_1)^{x_1}}{x_1!} e^{-\tilde{\lambda} t_1}$$

$$\left(\prod_{i=2}^n \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{x_i - x_{i-1}}}{(x_i - x_{i-1})!} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \right) \frac{(\lambda t_1)^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda t_1}$$

$$= \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N_1(T)} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})T}$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N_1(T)} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})T} \middle| \mathcal{F}_t \right] =$$

← багун и прироста $N_1(t)$

багун и прироста t
 $N_1(T-t) \in Po(\lambda(T-t))$

$$= \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N_1(t)} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} \mathbb{E} \left[\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N_1(T) - N_1(t)} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})(T-t)} \middle| \mathcal{F}_t \right] =$$

$$= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N_1(T-t)} \right] e^{(\lambda - \tilde{\lambda})(T-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^k \frac{(\lambda(T-t))^k}{k!} e^{-\lambda(T-t)} \times e^{(\lambda - \tilde{\lambda})(T-t)}$$

$$= e^{[(\tilde{\lambda} - \lambda) + (\lambda - \tilde{\lambda})](T-t)} = 1$$

$N(t)$ е поасонов процес с интензивност λ

$\Rightarrow$ процесът $\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_1(t)} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t}$ е мартингал. относно вероятностната мярка, спрямо която $N_1(t)$ има интензивност $\tilde{\lambda}$.

$N(t) - \lambda t$ ще бъде мартингал относно оригиналната вероятност.

Разл. вероятността

$$Q(A) := \mathbb{E} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})T} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N(T)} \mathbb{I}_A \quad \text{за } A \in \mathcal{F}_T$$

Тогава $N(t) - \tilde{\lambda}t$ е Q -мартингал, което означава, че $N(t)$ е поасонов процес с интензивност $\tilde{\lambda}$.

11.01.2019

$\frac{Q}{P} \stackrel{\text{прот модел}}{=} Z$

$E_P \left(\frac{Q}{P} \mid \mathcal{F}_t \right) \stackrel{\text{дискретен модел}}{=} Z_t$

Абстрактна теорема на Гурсанов:

Ако x_t е P -мартингал, то $x_t - \int_0^t \frac{d[x, z]}{z_s}$ е Q -мартингал

Опр. Крайномерно разпределение на случайен процес

$\{z_t\}$ - случайен процес

$P(\{z_{t_1} \in A_1, \dots, z_{t_n} \in A_n\})$, където $t_1, \dots, t_n$ са различни и $A_1, \dots, A_n$ са интервали, се нарича крайномерно разпределение.

$\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N(t)} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} \stackrel{\text{модел с покови влияния}}{=} Z_t$

$\uparrow$
 P -мартингал

Нека вземем $\tilde{\lambda} = 2\lambda$

$\Rightarrow Z_t = 2^{N(t)} e^{-\lambda t}$

Но $E_t(N) = 2^{N(t)}$

$E_t(X) E_t(Y) = E_t(X+Y) + [X, Y]$ $\swarrow$ 0 за $X = 2^{N(t)}$ и $Y = e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow Z_t = E_t(N(t) - \lambda t)$

$\uparrow$ компенсирани поасонов процес;
мартингал

$dZ_t = Z_t - d(N(t) - \lambda t) \leftarrow$ уравнение на Далеан

$$E_t(M(t)) = \mathcal{I} \left(1 + \Delta M(s) \right)_{s \leq t} \leftarrow \text{μεταμε ga } s \text{ ga } (\tilde{\lambda}, N(t))$$

$$\Delta M(t) = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} - 1$$

$$\Rightarrow M(t) = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} N(t)$$

$$dz_t = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} z_t d(N(t) - \lambda t)$$

Επομένως χρησιμοποιούμε το θεώρημα και Γυρκανοβ

$$\text{Γ-μα (Γυρκανοβ)} \left. \begin{aligned} x_t &= N(t) - \lambda t \\ z_t &= \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N(t)} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_t - \int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s} \quad \text{Q-μαρτυρία}$$

2-βο

$$dz_t = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} z_t d(N(t) - \lambda t)$$

$$d[x, z]_s = \begin{cases} 0, & \text{οσο καμια σκονη με } N \text{ } \theta \text{ } s \\ 1, & \Delta z_s = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} z_{s-} \text{ } \text{unore} \end{cases}$$

$$x_t - \int_0^t \frac{d[x, z]_s}{z_s} = N(t) - \lambda t - \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} \sum_{s \leq t} \frac{z_{s-}}{z_s} \Delta N(s) = (1)$$

$$\text{μο. } z_s - z_{s-} = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} z_{s-} \Rightarrow z_s = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} z_{s-}$$

$$\Rightarrow (1) = N(t) - \lambda t - \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} \sum_{s \leq t} \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \Delta N(s) = N(t) - \lambda t - \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\tilde{\lambda}} \sum_{s \leq t} \Delta N(s) =$$

$$= \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} N(t) - \lambda t = \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \underbrace{(N(t) - \tilde{\lambda} t)}_{\text{Q-μαρτυρία}}$$

z_t σε καμια σιγη γεμετρικη ποσωση προζει

~~Handwritten scribbles and crossed-out text at the top of the page.~~

$M(t)$ - суммен процесс

$$M(t) = \sum_{i=1}^n x_i N_i(t)$$

$N_i(t)$ - процесс с инт. λp_i

$$M(t) = \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N(t)} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t}$$

Положим $\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = 1 + \delta$

$$\Rightarrow M(t) = e^{-\lambda \delta t} (1 + \delta)^{N(t)}$$

$S(t)$ - ценный процесс на рисковом активе, задан от

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t-)d(N(t) - \lambda t)$$

$$S(t) = S(0) e^{\mu t - \lambda \delta t} (1 + \delta)^{N(t)}$$

Безрисков актив с нулевым процентом

~~Выводим~~ $\max(S(t) - K, 0)$ - финальная доходность на европейская опция.

Тогда цена на опцию

1. Безрисковая вероятность Q , такая что предельная доходность на рисковом активе Q равна нулю на нулевом проценте

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t-)d(N(t) - \lambda t + \tilde{\lambda}t - \tilde{\lambda}t) =$$

$$= \cancel{\mu S(t)dt} + (\mu + (\tilde{\lambda} - \lambda\delta)) S(t)dt + \sigma S(t-)d(N(t) - \tilde{\lambda}t)$$

Определяме $\tilde{\lambda}$ така, че $\mu + (\tilde{\lambda} - \lambda)\delta = r$

$$\tilde{\lambda} = \frac{r - \mu}{\delta} + \lambda$$

Q е такава, че $N(t)$ да е с интензивност $\tilde{\lambda}$.

2. Цена на опцията

$V(t)$ - портфейл, ~~на~~ съпоставяме $V(T) = \max(S(T) - K, 0)$

Процесът $V(t)e^{-rt}$ е Q мартинал

$$\Rightarrow V(t)e^{-rt} = \mathbb{E}_Q(V(T)e^{-rT} | \mathcal{F}_t)$$

Оттук намираме $V(t) = \max(S(t) - K, 0) = \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)} \max(S(T) - K, 0) | \mathcal{F}_t)$

$$S(T) = (1 + \delta)^{N(T)} e^{-\lambda \delta T} = S(t) (1 + \delta)^{N(T) - N(t)} e^{-\lambda \delta (T-t)}$$

$$C(t, K) := \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)} \max(x(1 + \delta)^{N(T) - N(t)} e^{-\lambda \delta (T-t)} - K, 0))$$

Това означава може да бъде пресметнато като означава на дискретна случайна величина (в ред)